



TITLE:

音響孤立波の伝播に及ぼす加熱・
冷却効果 (大自由度・強非線形の波
動現象の数理)

AUTHOR(S):

杉本, 信正

CITATION:

杉本, 信正. 音響孤立波の伝播に及ぼす加熱・冷却効果 (大自由度・強非線形の波動現象の数理). 数理解析研究所講究録 1999, 1092: 100-109

ISSUE DATE:

1999-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62928>

RIGHT:

音響孤立波の伝播に及ぼす加熱・冷却効果

阪大院 基礎工 杉 本 信 正 (Nobumasa SUGIMOTO)

1. はじめに

気体中を伝播する音波の音圧が大きくなると、圧力波形に不連続を伴う衝撃波が発生することはよく知られている。しかし、波形が滑らかでしかも局在した孤立波の存在は、空気のような普通の気体中ではあり得ないとこれまで考えられたきた。ところが、長い管に同じヘルムホルツ共鳴器を多数軸方向に等間隔で取り付け、管が空間的に周期構造をもつようにすると、孤立波が管内の気体中を伝播できるようになることが最近の研究で明らかになってきた[1-3]。

この音響孤立波は、管断面にわたって一様な平面波で、軸方向に一定の速度で波形を変えることなく安定に伝播する圧縮性のパルス波である。その速度は、線形音速 a_0 より遅い（亜音速）が、共鳴器列の大きさによって決定される速度 $a_0(1 - \kappa/2)$ より速いことが知られている。ここで、 κ は共鳴器列の大きさを表すパラメータで、空洞体積 V を共鳴器取り付け間隔当たりの管の体積 Ad (A は管の断面積、 d は取り付け間隔) で割った量 ($\kappa = V/Ad$) として定義され、 κ は 1 より十分小さい量とする。孤立波の高さ（音圧）は伝播速度が音速に近づくにつれ高くなるが、極限值が存在する。この極限音圧を Δp とすると、 $\Delta p/p_0$ は $8\gamma\kappa/[3(\gamma+1)]$ ($\ll 1$) で与えられる。ここで、 p_0 は平衡状態での圧力で、 γ は比熱比である。一方、伝播速度が下限に近づくとき、孤立波は K-dV ソリトンに漸近することが分かっている。

音響孤立波は、衝撃波と違って圧力の不連続がなくしかも安定に伝播し、そして質量、運動量、エネルギーを定常的に輸送するので色々な工学的な応用が考えられる。そこで、孤立波を増幅する方法を確立しておくことは、応用面を広げる上で必要になるであろう。増幅の一つの手段として、管の一部を加熱または冷却する熱効果を利用することが考えられる。手始めに、気体の温度が管軸方向に緩やかな勾配を持つ場合の音響ソリトンの伝播について調べた [4]。粘性や特に熱伝導性を全て無視すると、その伝播は次に示す K-dV 方程式に付加項のついた次式で支配される：

$$\frac{\partial f}{\partial X} + K \frac{\partial f}{\partial \theta} - f \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{4T_e} \frac{dT_e}{dX} f = \Gamma_e \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3}. \quad (1.1)$$

ここで、 $f(\theta, X)$, θ , X , $T_e(X)$ はそれぞれ、無次元超過圧力、平衡状態の線形音速で測った遅延時間、管の長さ方向の遠方場座標、 $T_e(X)$ は気体の平衡温度であり、 K, Γ_e はパラ

メータである。これらの量は具体的には以下のように定義されている：

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon f = \frac{(\gamma+1)}{2\gamma} \frac{p'}{p_0} = \frac{(\gamma+1)}{2} \frac{u}{a_e}, \quad (0 < \varepsilon \ll 1) \\ \theta = \omega \left(t - \int^x \frac{dx}{a_e} \right), \quad X = \varepsilon \omega \int^x \frac{dx}{a_e}, \quad a_e = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T_e} \\ K = \frac{\kappa}{2\varepsilon}, \quad \Gamma = \frac{K}{\Omega}, \quad \Omega = \left(\frac{\omega_e}{\omega} \right)^2. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

ここで、 $\varepsilon (\ll 1)$ は非線形性の大きさの程度を測る小さなパラメータとして、 p', u はそれぞれ超過圧、気体の軸方向速度を表し、 a_e は局所線形音速で、気体温度が軸方向に変化していることから X に依存する。また、 \mathcal{R} は気体定数、 ω, ω_e はそれぞれ音波の代表角周波数と共鳴器の固有角周波数である。 ω_e は音速 a_e を通して X に依存する。

ところで、「増幅」の意味について詳しく説明することなく既に用いてしまったが、一体「増幅」とは何であるかを考えてみたい。共鳴器列を取り付けない管の中を、温度勾配の下に伝播する線形音波を考えると、その振る舞いは方程式(1.1)の左辺第1項と第4項で記述される。実際、 κ をゼロとおいて、非線形項を無視すればよい。この方程式は簡単に解けて、 $f T_e^{1/4}$ が X に関して一定であることを示す。したがって、超過圧 p' は T_e の $-1/4$ 乗に比例することが分かるが、一方粒子速度 u は a_e が温度の平方根に比例することから、逆に $+1/4$ 乗に比例することが分かる。仮に温度が上昇すると、超過圧は減少するのに対し、粒子速度は逆に増加することになる。この結果、エネルギー流束 $p'u$ は変わらない。そこで、何を増幅と呼べばよいのかということになるが、ここではエネルギー流束が X 方向に増加することを増幅の定義にする。非線形波の場合には、方程式(1.1)を用いるとエネルギー流束の時間にわたる積分値が一定に保たれることが分かる：

$$\frac{d}{dX} \int_{-\infty}^{\infty} p' u d\theta = 0. \quad (1.3)$$

エネルギー流速の積分値が保存されるのは、粘性や熱伝導性の散逸効果は無視した結果である。実際、熱伝導率がゼロであればどのようにして気体に温度分布を与えるのか考えるのは面白い。実際、有意な増幅を得るためには熱伝導効果が重要な役割を演じることが予想される。以下の解析では散逸効果、特に熱伝導効果は小さいがその有限性を考慮した理論を展開し、如何にすれば孤立波の増幅が可能になるか調べる。

2. 定常温度場に及ぼす熱伝導率の効果

まず最初に、気体の熱伝導率を考慮した場合の管の中の定常温度場について考える。気体の密度、圧力、温度、エントロピーおよび速度ベクトルをそれぞれ $\rho, p, T, S, \mathbf{v}$ で表すと、連続の式、Navier-Stokes の式、エネルギー式はそれぞれ以下のように表される：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\eta + \frac{\zeta}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (2.2)$$

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = k \Delta T + \Phi. \quad (2.3)$$

ここで、 D/Dt はLagrange微分で、 t は時間である。また、 η, ζ, k はそれぞれ第一、第二粘性率、熱伝導率を表し、これらの値は簡単のため温度に依らず一定とする。 Φ は粘性散逸関数を表す。

さて、気体が静止平衡状態 ($p = p_0 = \text{一定}, \mathbf{v} = 0$) にあるとすると、温度は次のLaplace 方程式を満足しなければならない：

$$\Delta T = 0. \quad (2.4)$$

壁面温度 T_w が軸方向に変わるとして、管の中の気体の平衡温度を $T_e = T_w(x) + \theta(x, y, z)$ とおくと、 θ は

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = -\frac{d^2 T_w}{dx^2} \quad (2.5)$$

を満足する。ここで、 x は管の軸方向に、 y, z は軸に垂直な面内にとったカルテシアン座標である。

いま、壁面温度が軸方向に変化する代表長さが、管の直径に比べて十分長いと仮定すると、次の近似が成り立つ：

$$\left| \frac{\partial \theta}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|. \quad (2.6)$$

簡単のため半径 R の円管を考えると、 θ は

$$\theta(r, x) = \frac{1}{4} \frac{d^2 T_w}{dx^2} (R^2 - r^2) \quad (2.7)$$

と求まる。ただし、 r は中心からの距離である。断面にわたる平均温度は

$$\bar{T}_e = \frac{1}{A} \int T dA = T_w + \frac{R^2}{8} \frac{d^2 T_w}{dx^2} \quad (2.8)$$

となり、 \bar{T}_e は壁面温度と第2項分だけ異なる。以下の解析では壁面温度の x 方向の変化は十分小さく、

$$R^2 \left| \frac{d^2 T_e}{dx^2} \right| \ll R \left| \frac{dT_e}{dx} \right| \quad (2.9)$$

の近似が成り立つとする。例えば、半径 5 cm、長さ 5 m の管を考えると、縦横比は実に 1:100 である。この近似の下では、温度 T_e は断面内では一様で、 T_w に等しいと見なせる。一方、 T_e の軸方向の変化については、その x に関する 1 階微分は考慮するが、2 階微分は小さいとして無視することにする。温度分布が断面内で一様であっても、しかし熱流は軸方向に存在することに注意したい。

3. 管の中を伝播する非線形音波の定式化

定式化は既に発表済みの論文[1]と同じようにできるので、本報告に関わる点に絞って簡単に述べる。詳しくは文献を参照されたい。問題を定式化するにあたって、三つの大きな仮定を設ける。一つは、音波の非線形性は小さく、その2次項は考慮するが3次項以上は無視する仮定である。非線形性の大きさは、平衡圧力に対する超過圧の大きさ、もしくは代表音速 a_0 に比した気体の代表速度 u_0 、すなわち音響マッハ数 $\varepsilon (= u_0/a_0)$ で測られる。ここでは ε は1に比べて十分小さいものとする。二つ目は、粘性や熱伝導性の効果が小さいとする仮定である。この効果は、動粘性率を ν とすると、音速 a_0 および波長 a_0/ω (ω : 代表周波数) で定義される音響 Reynolds 数 $Re (= a_0^2/\nu\omega)$ によって測られる。ここでは Re は1より遥かに大きいと仮定し、 $1/Re$ の一次項だけを考慮する。最後の仮定は、平衡状態の温度分布に関するものである。温度変化の代表長さ l が代表波長 a_0/ω に比べて十分長いとして、 $a_0/\omega l$ の1次項のみ考慮し、その2次以上の項は無視する。

これらの仮定の下で、音波は壁面近傍の境界層を除けば、管内をほぼ平面波で伝播すると考えられる。そこで、平面波と考えられる管内の主流部にわたって方程式を平均化すると、連続の式、Navier-Stokes の式、エネルギー式、理想気体を仮定した状態方程式および圧力を密度とエントロピーで表した関係式はそれぞれ以下のように書くことができる：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = \frac{1}{A} \oint \rho v_n ds, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.2)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad (3.3)$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0}, \quad (3.4)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \exp \left(\frac{S - S_0}{c_v} \right). \quad (3.5)$$

ここで, u は気体の軸方向速度で, v_n は主流部外縁での断面内向き速度成分である. 積分はその外縁にわたって一周する. A は主流部の断面積であるが, 境界層の厚さが薄いので実質的には管の断面積で置き換えてもよい. また, c_v は気体の定積比熱で, 添え字 0 はある基準状態での値を示すものとする.

次に, 管の中の気体の平衡状態について考える. 気体が静止しているものとする ($\mathbf{v} = 0$), 圧力は至る所で一定値 p_0 をとる. しかし, 密度, 温度, エントロピーはそれぞれ軸方向に変化する:

$$p = p_0, \quad \rho = \rho_e(x), \quad T = T_e(x), \quad S = S_e(x), \quad u = 0, \quad v_n = 0. \quad (3.6)$$

これらの量は次の関係式を満たさなければならない:

$$\rho_e(x) T_e(x) = \text{一定}, \quad \left(\frac{\rho_e(x)}{\rho_0} \right)^\gamma \exp \left(\frac{S_e(x) - S_0}{c_v} \right) = 1. \quad (3.7)$$

ここで, 添え字 e は平衡状態での値を意味し, e を付けた量は x に依存する. 特に, エントロピーが軸方向に変化することに注意する.

方程式(3.1), (3.2)を通常よく用いられる形に変形するために, 密度を次の局所断熱音速 a の定義を用いて消去する:

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S=S_e} = a_e^2 \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^{\gamma-1}. \quad (3.8)$$

ここで, 線形断熱音速 a_e は $\sqrt{\gamma p_0 / \rho_e}$ である. そして方程式(3.1), (3.2)の和, 差をとることにより, 次式が得られる:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[u \pm \frac{2}{\gamma-1} (a - a_e) \right] &= \pm \frac{a_e}{A} \oint v_n ds + \nu_{de} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &+ \frac{2}{\gamma-1} \left[(a - a_e) a \pm (\gamma a - a_e) u \right] \left(\frac{1}{a_e} \frac{da_e}{dx} \right) - \frac{p_0}{c_v \rho_e} \frac{\partial S'_{conv}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

ここで, 複合は同順にとり, ν_{de} は音の拡散率を表し, $(\eta / \rho_e) [4/3 + \zeta / \eta + (\gamma - 1) / Pr]$ ($Pr (= \eta c_p / k)$ は Prandtl 数で, c_p は定圧比熱) で定義される. また, S'_{conv} はエントロ

ピーの変動の内、対流によって引き起こされる成分を表し、粘性や熱伝導性効果による変動分は既に右辺第2項に取り入れてある。この S'_{conv} は次式で支配される：

$$\frac{\partial S'_{conv}}{\partial t} + u \frac{dS_e}{dx} = 0. \quad (3.10)$$

もし平衡状態が x に依らない一様状態であれば、(3.9) は文献[1] で既に導いた式(2.26) に帰着する。

式(3.9)の右辺の項は全て小さく、最低次近似では左辺がゼロである。いま、 x 軸の正方向に伝播する単一波の遠方場を考えると、 x 軸の負の方向に向かう特性線に沿っては

$$u - \frac{2}{\gamma - 1}(a - a_e) = 0 \quad (3.11)$$

が最低次で成り立つ。この関係式を(3.9)の正方向に伝播する波に用いて a を消去し、また(3.9)を t に関して微分した後に、(3.10)を用いて S'_{conv} を消去すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \left(a_e + \frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{3}{2} \frac{da_e}{dx} \frac{\partial u}{\partial t} + a_e \frac{da_e}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_e}{2A} \frac{\partial}{\partial t} \oint v_n ds + \frac{\nu_{de}}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \quad (3.12)$$

を得る。ここで、 a_e の x に関する2階微分項は、最初の第3番目の仮定により無視した。

この方程式を閉じさせるために、 v_n の積分項を評価する。それは、境界層と共鳴器からの寄与から成る。境界層外縁での v_n を v_b と表し、共鳴器列を取り付けた箇所では、境界層がないかわりに共鳴器への流入速度 w を考慮すると、積分値は

$$\frac{1}{A} \oint \rho v_n ds \simeq \frac{\rho_e}{A} [(2\pi R - NB) v_b - NBw] \quad (3.13)$$

となる。ここで、 B は共鳴器の開口部面積（スロート断面積）で、 N は管の単位長さ当たりの共鳴器の数である。もし、共鳴器列が軸方向に間隔 d で取り付けられていると、 N は $1/d$ に等しい。

境界層外縁での速度の評価は次章で扱うことにし、ここでは共鳴器への流入速度について簡単に纏めておく。詳しくは文献[1]を参照されたい。共鳴器の振る舞いは、空洞内の気体は静止していると仮定し、連続の式

$$V \frac{\partial \rho_c}{\partial t} = B \rho_e w, \quad (3.14)$$

と、一方スロート内では、音波の波長がスロート長さに比べて十分長いことから気体の圧縮性を無視し、線形化された運動方程式

$$L \rho_e \frac{\partial w}{\partial t} = -p + p_c - \frac{2L}{r} \nu^{1/2} \rho_e \frac{\partial^{\frac{1}{2}} w}{\partial t^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.15)$$

によって記述できるとする．ここで， ρ_c は空洞内の気体の平均密度， L はスロート長さ， r はスロート半径である．式(3.15)の右辺最後の項は，スロート壁面での境界層摩擦に起因する履歴効果で， $1/2$ 階微分は次式で定義される [5]：

$$\frac{\partial^{\frac{1}{2}} w}{\partial t^{\frac{1}{2}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\partial w(\tau)}{\partial \tau} d\tau . \quad (3.16)$$

方程式(3.14)において， $\partial \rho_c / \partial t = a_e^{-2} \partial p_c / \partial t$ を用いて w を表すと

$$w = \frac{V}{\rho_e B a_e^2} \frac{\partial p_c}{\partial t} \quad (3.17)$$

となる．この w を(3.15)に代入すれば，管内圧力に対する空洞内圧力の応答方程式が得られる：

$$\frac{\partial^2 p'_c}{\partial t^2} + \frac{2\nu^{1/2}}{r} \frac{\partial^{\frac{3}{2}} p'_c}{\partial t^{\frac{3}{2}}} + \omega_e^2 p'_c = \omega_e^2 p' . \quad (3.18)$$

ここで， p'_c, p' はそれぞれ p, p_c の p_0 からの超過圧である．また， $\omega_e(x)$ は共鳴器の固有角周波数 $\sqrt{B a_e^2 / L V}$ である．

4. 境界層の定式化と v_b の評価

さて， v_b を求めるために，境界層内の流れを考える．音響マッハ数が小さいことから，境界層内の最低次の流れは線形近似できる．そこで境界層内の変数を主流部での値とそれからのずれの和として表す：

$$\begin{bmatrix} \rho \\ p \\ T \\ S \\ u \\ v \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \rho(x, t) \\ p(x, t) \\ T(x, t) \\ S(x, t) \\ u(x, t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho'(x, n, t) \\ p'(x, n, t) \\ T'(x, n, t) \\ S'(x, n, t) \\ u'(x, n, t) \\ v'(x, n, t) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

ここで， n は管壁面に垂直内向きの座標で，壁面を原点をする．

境界層近似の下で，連続の式，運動方程式，エネルギー式をそれぞれ線形化して書き下すと

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_e u') + \frac{\partial}{\partial n}(\rho_e v') = 0 , \quad (4.2)$$

$$\rho_e \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u'}{\partial n^2} , \quad (4.3)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial n}, \quad (4.4)$$

$$\rho_e T_e \left(\frac{\partial S'}{\partial t} + u' \frac{dS_e}{dx} \right) = k \frac{\partial^2 T'}{\partial n^2} \quad (4.5)$$

となる.

一方, 境界条件は壁面上で流体速度がゼロで, 温度が壁面温度に等しくなることを要求する:

$$u' = -u(x, t), \quad T' = -T(x, t) + T_e(x) \quad \text{at} \quad n = 0. \quad (4.6)$$

また, 境界層外縁に向かうにつれ ($n \rightarrow \infty$), 軸方向速度および温度は主流部の値に一致することが要求される:

$$u' \rightarrow 0, \quad T' \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

式(4.4)から境界層内では $p' = 0$ であるので, (4.3), (4.5) から解くべき方程式は

$$\rho_e \frac{\partial u'}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 u'}{\partial n^2}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u' \frac{dT_e}{dx} = \frac{\nu_e}{P_r} \frac{\partial^2 T'}{\partial n^2} \quad (4.9)$$

となる. ここで, $p' = 0$ より, $p'/\rho_e = -T'/T_e$ の関係が成り立つので, $S' = c_p T'/T_e$ とした. また, (3.7) から $\rho_e^{-1} d\rho_e/dx = -T_e^{-1} dT_e/dx$ から, $dS_e/dx = (c_p/T_e) dT_e/dx$ である.

これら方程式を解いて [6], 式(4.2) を境界層の厚さにわたって積分すると, v_b は次式によって与えられる:

$$v_b = \lim_{n \rightarrow \infty} v' = \int_0^\infty \frac{\partial v'}{\partial n} dn = \int_0^\infty \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T'}{T_e} \right) - \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} u' \right] dn. \quad (4.10)$$

積分を実行すると, v_b は

$$v_b = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{P_r}} \right) \sqrt{\nu_e} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\sqrt{\nu_e}}{\sqrt{P_r}(1 + \sqrt{P_r})} \left(\frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \right) \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} u}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \quad (4.11)$$

となる. ここで, u の $-1/2$ 階微分は次式で定義される [5].

$$\frac{\partial^{-\frac{1}{2}} u}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} u(x, \tau) d\tau. \quad (4.12)$$

こうして求めた v_b と (3.17) を (3.13) に用いると, (3.12) の積分項が u, p'_c を用いて表される.

ちなみに壁面での熱流は

$$q = -k \frac{\partial T_b}{\partial n} \Big|_{n=0} = k \sqrt{\frac{P_r}{\nu_e}} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left[(\gamma - 1) T_e \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{1 + \sqrt{P_r}} \frac{dT_e}{dx} u \right] \quad (4.13)$$

となる。しかし、境界層外縁での熱流の n 方向成分はゼロになる。

5. 結果と結論

以上より、方程式(3.12)と(3.18)は、正方向伝播の最低次の関係式 $p'/p_0 = \gamma u/a_e$ を用いると閉じる。これら方程式を既に(1.2)で定義した変数 f, θ, X で書き直し、 $[(\gamma + 1)/(2\gamma)]p'_c/p_0$ を εg とおくと、 f, g は次の方程式で支配される：

$$\frac{\partial f}{\partial X} - f \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{4T_e} \frac{dT_e}{dX} f = -\delta_e \frac{\partial^{\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{\frac{1}{2}}} + \beta_e \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\lambda_e}{T_e} \frac{dT_e}{dX} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{-\frac{1}{2}}} - K \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \delta_{re} \frac{\partial^{\frac{3}{2}} g}{\partial \theta^{\frac{3}{2}}} + \Omega g = \Omega f. \quad (5.2)$$

ここで、 $\beta_e, \delta_e, \lambda_e$ はそれぞれ

$$\beta_e = \frac{\nu_{ae}\omega}{2\varepsilon a_e^2}, \quad \delta_e = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{P_r}}\right) \frac{\sqrt{\nu_e/\omega}}{\varepsilon R^*},$$

$$\lambda_e = \frac{1}{\sqrt{P_r}(1 + \sqrt{P_r})} \frac{\sqrt{\nu_e/\omega}}{R^*}, \quad \delta_{re} = \frac{2\sqrt{\nu_e/\omega}}{r} \quad (5.3)$$

であり、 $\nu_e = \eta/\rho_e, 1/R^* = (1 - NRB/2A)/R$ である ($R \approx R^*$)。ここで、 $\delta_e, \lambda_e, \delta_{re}$ の定義から分かるように、それらは共に境界層の代表厚さ $\sqrt{\nu_e/\omega}$ と管の半径 R やスロート半径 r との比に比例することに注意する。

もし、(5.2)で $\Omega \gg 1$ とすると、

$$g = f - \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} - \frac{\delta_{re}}{\Omega} \frac{\partial^{\frac{3}{2}} g}{\partial \theta^{\frac{3}{2}}} = f - \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\delta_{re}}{\Omega} \frac{\partial^{\frac{3}{2}} f}{\partial \theta^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{\Omega^2}\right) \quad (5.4)$$

と近似できる。ここで、 δ_{re}/Ω は小さいとして無視し、(5.4)を(5.1)に代入し g を消去すると、(1.1)に散逸効果、特に有限熱伝導性の効果を取り入れた次の方程式が得られる：

$$\frac{\partial f}{\partial X} + K \frac{\partial f}{\partial \theta} - f \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{4T_e} \frac{dT_e}{dX} f = \Gamma_e \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3} + \beta_e \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \delta_e \frac{\partial^{\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{\lambda_e}{T_e}\right) \frac{dT_e}{dX} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{-\frac{1}{2}}}. \quad (5.5)$$

エネルギー流束 $p'u$ ($\propto \sqrt{T_e} f^2$) の積分値を計算するために、方程式(5.1)に f をかけて積分し、(5.2)を用い、さらに $f, \partial f/\partial \theta, \partial^2 f/\partial \theta^2, g, \partial g/\partial \theta$ が $|\theta| \rightarrow \infty$ でゼロになる場

合を考えると

$$\frac{d}{dX} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{T_e} \frac{f^2}{2} d\theta \right) = -\sqrt{T_e} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\beta_e \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 + \delta_e f \frac{\partial^{\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{\frac{1}{2}}} - \frac{\lambda_e}{T_e} \frac{dT_e}{dX} f \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{-\frac{1}{2}}} \right] d\theta \quad (5.6)$$

となる。ここで、 δ_{re} は無視した。これと同じ関係式は方程式(5.4)を用いても得られる。

右辺の括弧の中の第1項目は音波自身の散逸効果による減衰で、明らかにエネルギー流速を常に減少させるように作用する。しかし、 β_e の値は通常かなり小さいので ($1/R_e \ll \varepsilon \ll 1$)、これによる減衰は無視できる。第2項目は境界層摩擦によるものである。この効果は物理的には減衰に作用すると考えられるが、その積分形からは直ちに判断できない。最後の項が有限熱伝導率を考慮した温度勾配の効果を表す。孤立波のように f が常に正であると、その $-1/2$ 階微分も定義から常に正になり、それらの積は正になる。したがって正の温度勾配の下では、第3項は増幅効果に寄与することが分かる。第2項の f の $1/2$ 階微分項は、 $-1/2$ 階微分項の1階微分であることを用いて部分積分し、第3項と纏めると(5.6)の右辺は

$$\sqrt{T_e} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta_e \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\lambda_e}{T_e} \frac{dT_e}{dX} f \right) \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{-\frac{1}{2}}} d\theta \quad (5.7)$$

となる。もし、被積分関数の括弧内が正になるように温度勾配を与えれば、境界層摩擦による減衰に打ち勝って増幅がおこることが期待される。そのとき、熱流(4.13)の第2項は正になることから、壁面を通して境界層が加熱される。

参考文献

1. Sugimoto, N. "Propagation of nonlinear acoustic waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators," *J. Fluid Mech.* **244**, 55-78 (1992).
2. Sugimoto, N. "On generation of acoustic soliton," in *Advances in Nonlinear Acoustics* (ed. Hobaek, H.) (World Scientific, Singapore, 1993), pp.545-560.
3. Sugimoto, N. "Acoustic solitary waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators," *J. Acoust. Soc. Am.* **99**, 1971-1976 (1996).
4. 杉本信正, 辻元邦彦 "温度勾配下における音響ソリトンの伝播," 日本流体力学会年会 '98 講演論文集, pp.33-34 (1998).
5. 杉本信正 "非整数階微分・積分とその応用," *ながれ* **4**, pp.110-120 (1985).
6. Sugimoto, N. " 'Generalized' Burgers equations and fractional calculus," In *Nonlinear Wave Motion* (ed. Jeffrey, A.) (Longman, Essex/England, 1989), pp.162-179.